授業資料

２ 年　　組　　番

透視図の世界

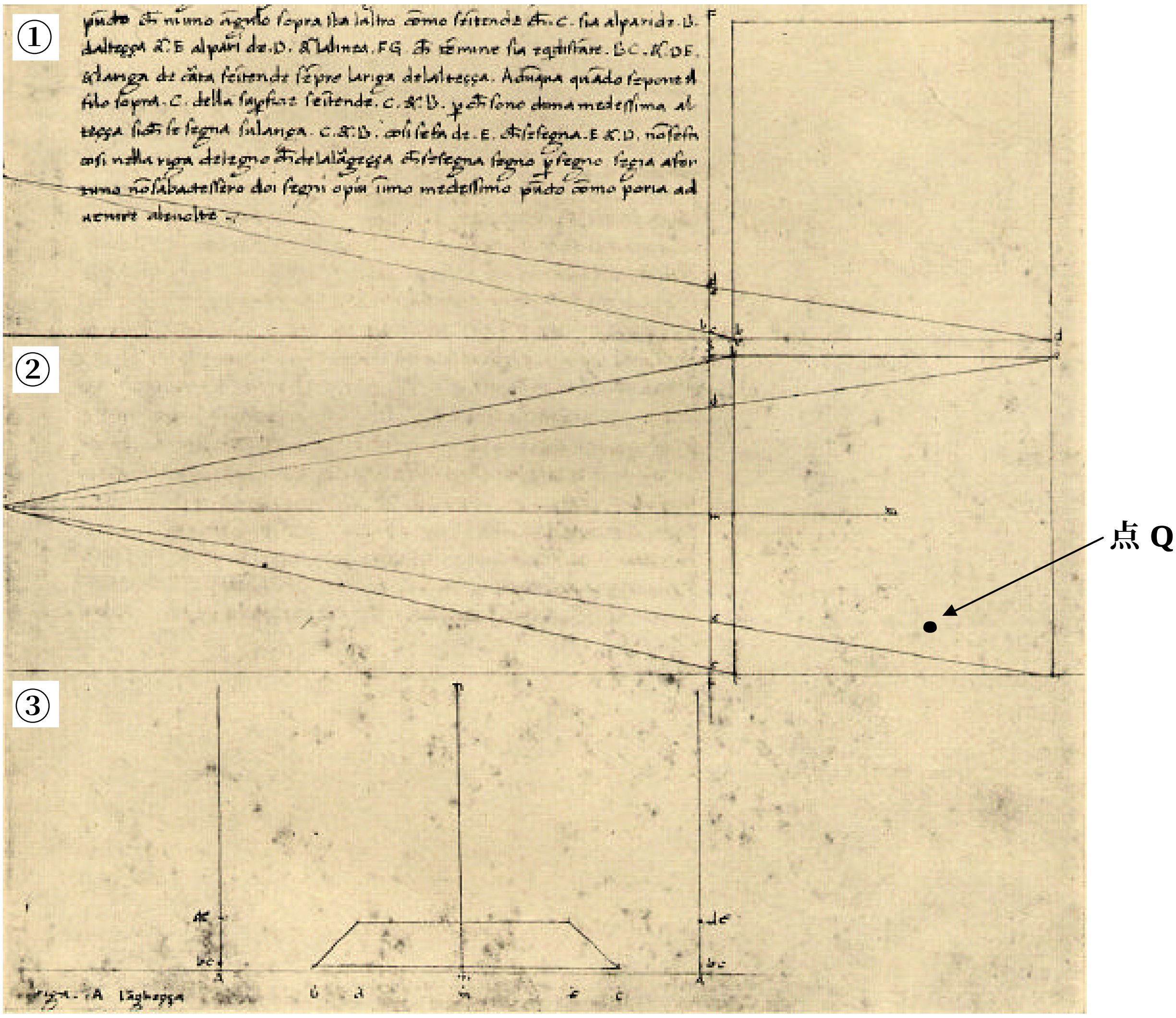
2時間目

― 私たちの数学で探究(1) ―

授業者：筑波大学大学院教育研究科１年
丸野　悟

前回の授業の後半では、透視図を描く方法をイタリアの画家 Piero della Francesca（ピエーロ・デッラ・フランチェスカ）の著した『De Prospectiva Pingendi（画家の透視図法について)』という文献中の図から探りました。今回はこの透視図法の考え方を用いて、みんなで“数学”してみましょう。

§１．点の見え方



問１

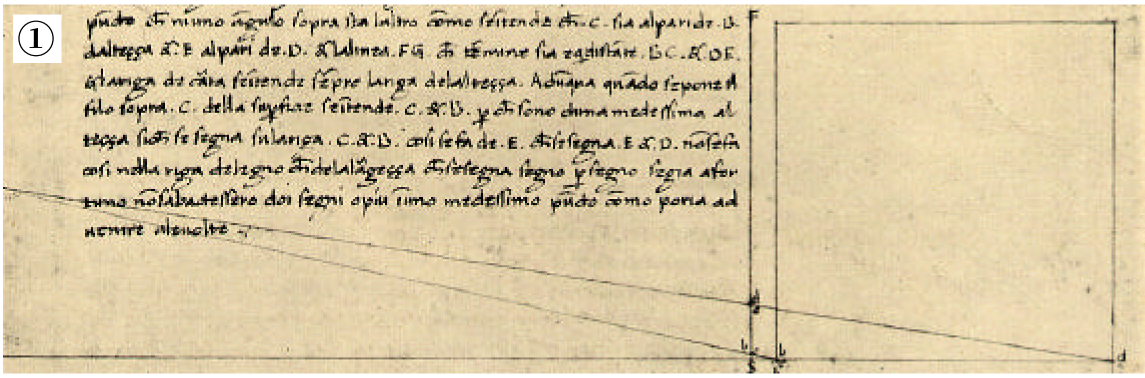
上の②図で示されるように，正方形の表面上に点Qがあるとき，それは

（１）．①図ではどの位置にあたるだろうか。

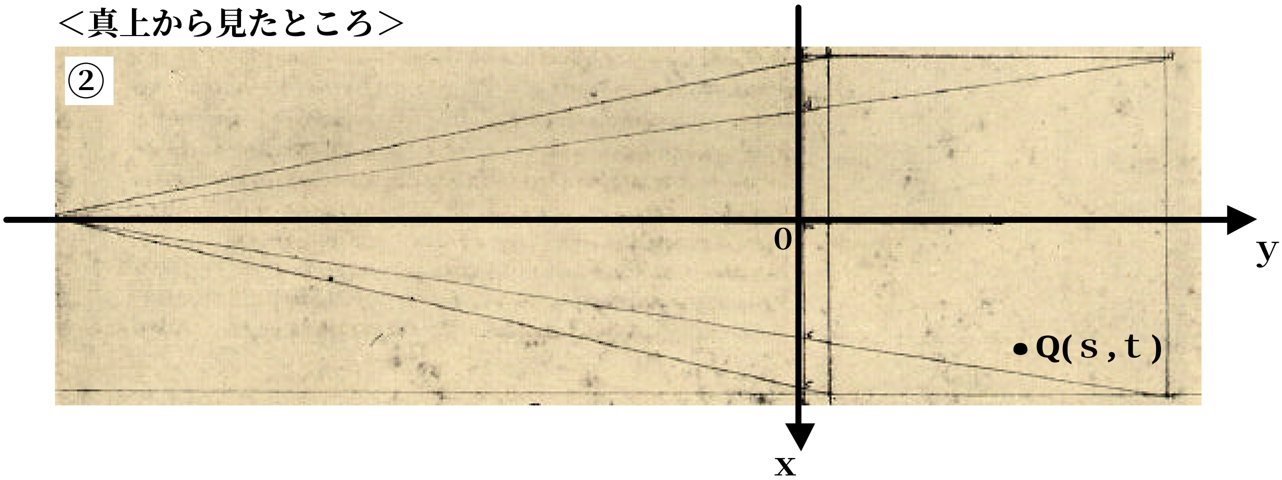
（２）．③図にある画面上ではどの位置に見えるだろうか。

この問いに答えるために 次ページのように座標軸を設けた。

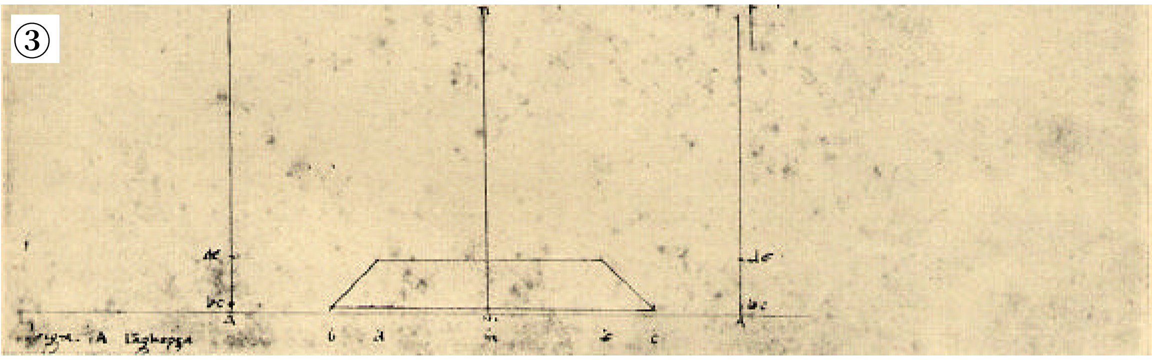
＜真横から見たところ＞



＜真上から見たところ＞



＜透視図の描かれる画面＞



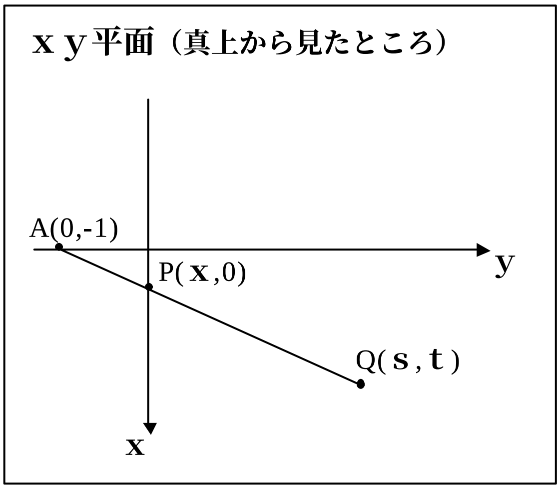
上の②図内に設定されたｘ軸とｙ軸を参考にして①図と③図内にも適当な座標軸を設定してみよう。（→上図中にかき込んでみよう。）

座標軸が決まったところで、これを使って画面上での点 Q の見える位置を求めていこう。

まず視点をＡとし，その位置を次のように定めることにする。

－ 画面との距離が１で，高さが２である位置。－

図１＜前ページの②図について分析！＞



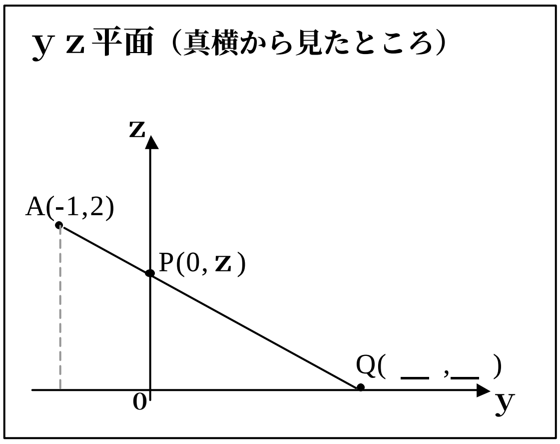
視点Ａの座標はA(０，－1)とおける。点 Ｑ の座標を Q(ｓ，ｔ)とおくと，2点Ａ，Ｑを通る直線の方程式は

________ ・・・[ア]

であるから，この直線とｘ軸との交点Ｐのｘ座標は ________ ・・・[イ]

である。

図２＜前ページの①図について分析！＞



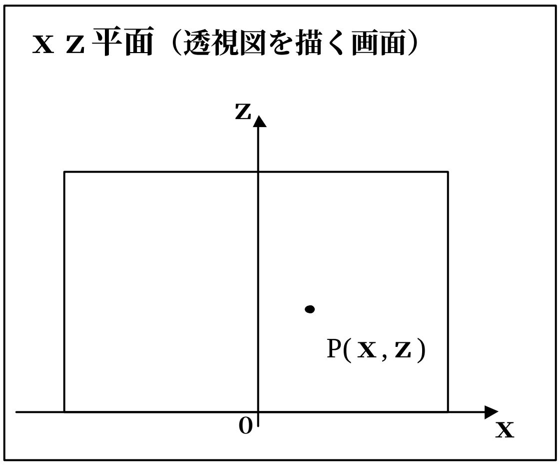
視点Ａの座標はA(－１，２)とおける。点Ｑの座標は Q(__ ，__) ・・・[ウ]

であり，２点 Ａ，Ｑ を通る直線の方程式は ________ ・・・[エ]

であるから，この直線とｚ軸との交点Ｐのｚ座標は ________ ・・・[オ]

である。

図３＜前ページの③図について分析！＞



ここで，透視図を描く画面はｘｚ平面であるから，[イ],[オ]より画面上の点Ｐの座標(即ち点Ｑの見える位置)は ｓ，ｔを用いて

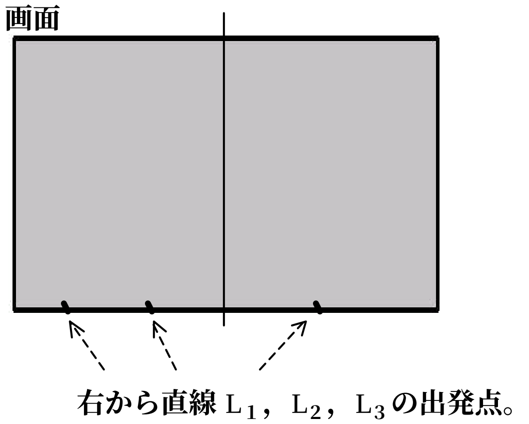
Ｐ(________ ， ________) ・・・[カ]

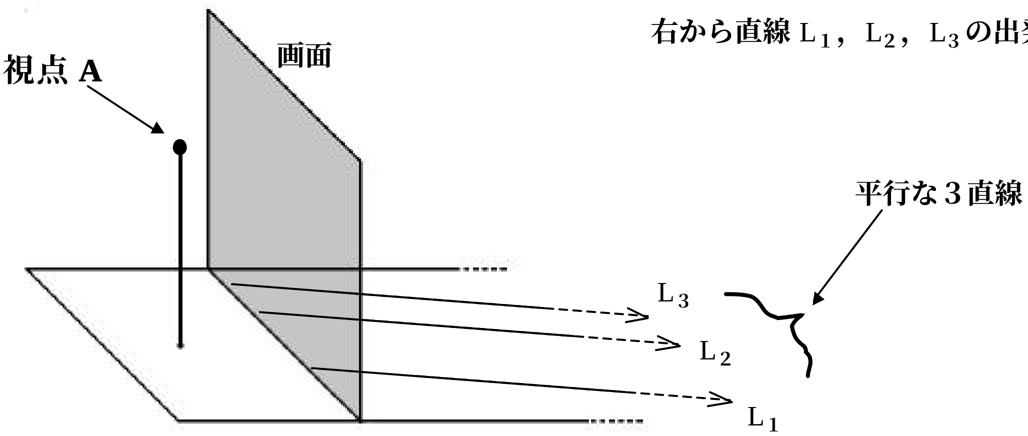
と表すことができる。

<u>これで，点 Q(ｓ，ｔ)の座標を具体的に与えれば，その透視図である点 Ｐ の位置が求められるようになった。</u>

§１で求めた“ 点の見える位置を求める式[イ],[オ] ”を使って透視図の世界をのぞいてみよう。

§２．平行な直線は，交わる





上図のように，視点 A の位置から見える平行線の透視図を画面上に描くとします。

問１

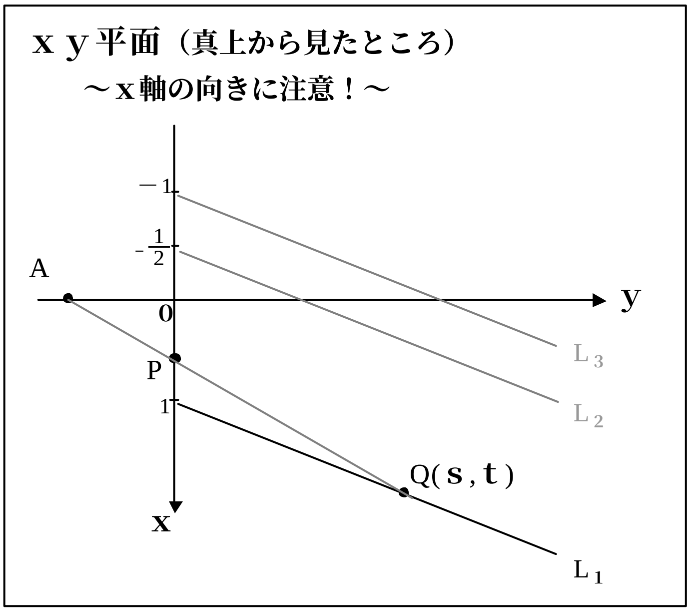
画面上にはどのように見えているか予想し，右上図に描き込んでみよう。

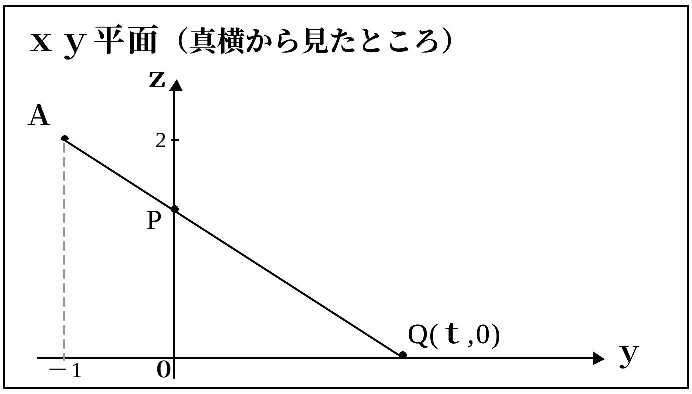
あなたの心の目には、どんな図形が見えましたか？

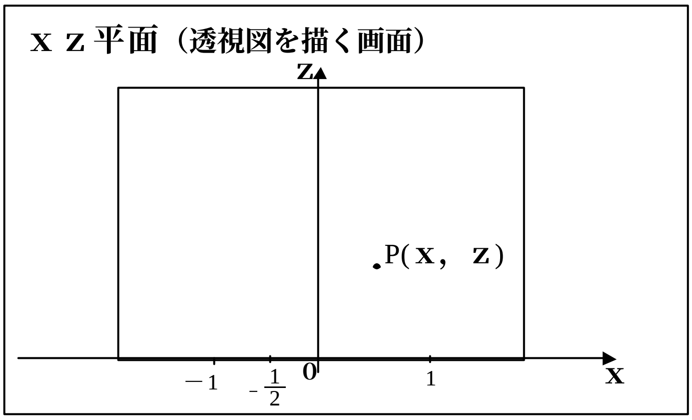
それでは，平行な３直線 L_1，L_2，L_3を具体的に次のように定め，どのような透視図に描かれるか調べてみよう。

$$\begin{cases} L_1 : y = 2x - 2 & (y \geqq 0) \\ L_2 : y = 2x + 1 & (y \geqq 0) \\ L_3 : y = 2x + 2 & (y \geqq 0) \end{cases}$$

とおく。







まず直線 L_1について考えてみる。点Ｑが L_1上にあるとき ｓ，ｔは

__________ ・・・[キ]

の関係式を満たしているから，[イ],[オ]式より画面(ｘｚ平面)上に見えている点Ｐの各座標は，点Ｑと画面との距離であるｔによってそれぞれ

$$\begin{cases} x = \underline{\qquad\qquad} & \cdots[ク] \\ z = \underline{\qquad\qquad} & \cdots[ケ] \end{cases}$$

と表されることがわかる。

ｘｙ平面上で点Ｑの座標を具体的に定めれば，それの画面(ｘｚ平面) 上に見える位置Ｐの座標が一意に定まるということは先にも述べましたが，視点Ａから見て直線L_1のはるか遠方はどのように見えるのでしょうか？

問２

直線L_1上の点Ｑを視点Ａの位置に対してはるかかなたへ遠ざけると，画面上に見える点Ｐの座標はどうなるだろうか？

直線上の点Ｑをはるかかなたへ遠ざけるということは，[ク]，[ケ]式において ｔの値を限りなく__________する・・・[コ]　　ということであるから，画面上の点Ｐのｘ座標とｚ座標は,

続きをどうぞ・・・

問３

直線L_2，L_3についても同様のことを調べよ。

＜解答欄＞自由に使ってください・・・

問４

他の傾きの平行線についてはどうか？

＜解答欄＞自由に使ってください・・・

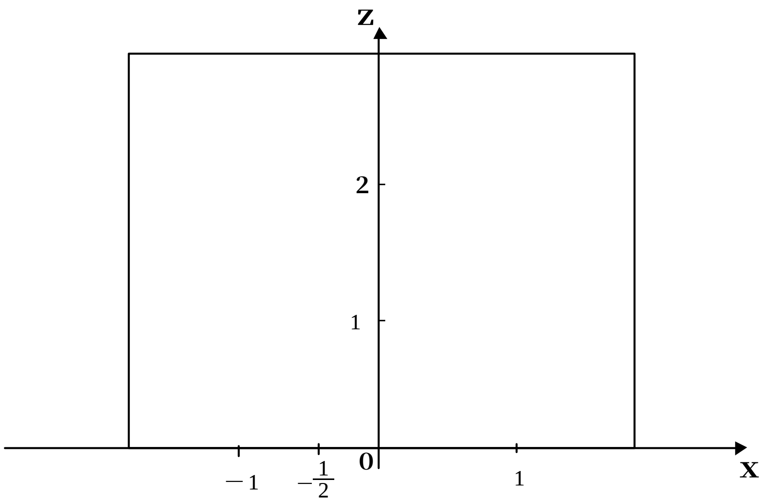
ヒント：任意の直線の方程式を$y=mx+n$として計算すると・・・

　ここまで“直線上の点Q”について調べてきましたが,“直線自身の透視図”が画面上にどのような図形として描かれるかを求めるには[ク],［ケ]式からtを消去してxとzの関係式を求めればよいのです。

問5

L_1，L_2，L_3の透視図について，それぞれの方程式を求めグラフを図示せよ。

＜解答欄＞　自由に使ってください・・・



豆ちしき

　透視図において，このように平行線が交わる点（正確にいうと交わって見える点）のことを“消失点（Vanishing Point）”といいます。

２時間目の授業，お疲れ様でした。今回の授業内容を振り返って，皆さんの感想を聞かせてください。

① ルネサンス期に研究されたこの透視図法の考え方をもとに、皆さんが学校で学んでいる“ 数学 ”を使って探究をしたことについての感想。

② ２時間目の感想（どんなことでもよいので自由に書いてください。）

ありがとうございました。